冬期講習　標準大　理系数学

目　次

第１講　積分 — p.2
第２講　極限 — p.3
第３講　微分と増減 — p.4
第４講　回転体の体積 — p.5
第５講　共有点と面積，体積 — p.6
第６講　複素数平面 — p.7

第１講　積分

1 ［A］ 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

［B］ 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$

［C］ 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\,dx$

テキスト解答

第１講　積分

1　［A］　次の定積分を計算せよ．

（1）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

（2）　$\displaystyle\int_0^{1} xe^{2x}\,dx$

（3）　$\displaystyle\int_1^{e} x\log x\,dx$

［B］　次の定積分を計算せよ．

（1）　$\displaystyle\int_0^{1} x\sqrt{2x+1}\,dx$

（2）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

（3）　$\displaystyle\int_0^{1} x^3e^{x^2}\,dx$

［C］　次の定積分を計算せよ．

（1）　$\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4+x^2}\,dx$

（2）　$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{4-x^2}\,dx$

（3）　$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

（4）　$\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{4+x^2}\,dx$

【答】　［A］（1）　$\dfrac{\pi-2}{8}$　（2）　$\dfrac{e^2+1}{4}$　（3）　$\dfrac{e^2+1}{4}$

［B］（1）　$\dfrac{6\sqrt{3}+1}{15}$　（2）　$\dfrac{2}{15}$　（3）　$\dfrac{1}{2}$

［C］（1）　$\dfrac{\pi}{8}$　（2）　$\dfrac{1}{4}\log 3$　（3）　$\dfrac{\pi}{6}$　（4）　$\dfrac{1}{2}\log\dfrac{5}{4}$

【解説】　［A］（1）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi-2}{8}$$

（2）
$$\int_0^{1} xe^{2x}\,dx=\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{1}-\int_0^{1}1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^{1}=\left[\frac{2x-1}{4}e^{2x}\right]_0^{1}=\frac{e^2+1}{4}$$

（3）
$$\int_1^{e} x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\cdot\log x\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\cdot\log x\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e}=\left[\frac{x^2}{4}(2\log x-1)\right]_1^{e}=\frac{e^2+1}{4}$$

［B］（1）　$2x+1=t$ と置換すると，

$$\int_0^{1} x\sqrt{2x+1}\,dx=\int_1^{3}\frac{t-1}{2}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_1^{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}}{4}dt=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\right]_1^{3}$$

$$=\left[\frac{t\sqrt{t}}{30}(3t-5)\right]_1^3=\frac{6\sqrt{3}+1}{15}$$

(2)　$\cos x=t$ と置換すると，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x\,dx=\int_1^0(1-t^2)t^2(-dt)=\int_0^1(-t^4+t^2)dt=\left[-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

(3)　$x^2=t$ と置換すると，

$$\int_0^1 x^3e^{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}te^t\,dt=\left[\frac{1}{2}te^t\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^t\,dt=\left[\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{2}e^t\right]_0^1=\left[\frac{1}{2}(t-1)e^t\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

［C］（1）　$x=2\tan\theta$ と置換すると，

$$\int_0^2\frac{1}{4+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

(2)　$$\int_0^1\frac{1}{4-x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)dx=\left[\frac{\log|2+x|-\log|2-x|}{4}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1=\frac{1}{4}\log 3$$

(3)　$x=2\sin\theta$ と置換すると，

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

(4)　$$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\log(4+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log\frac{5}{4}$$